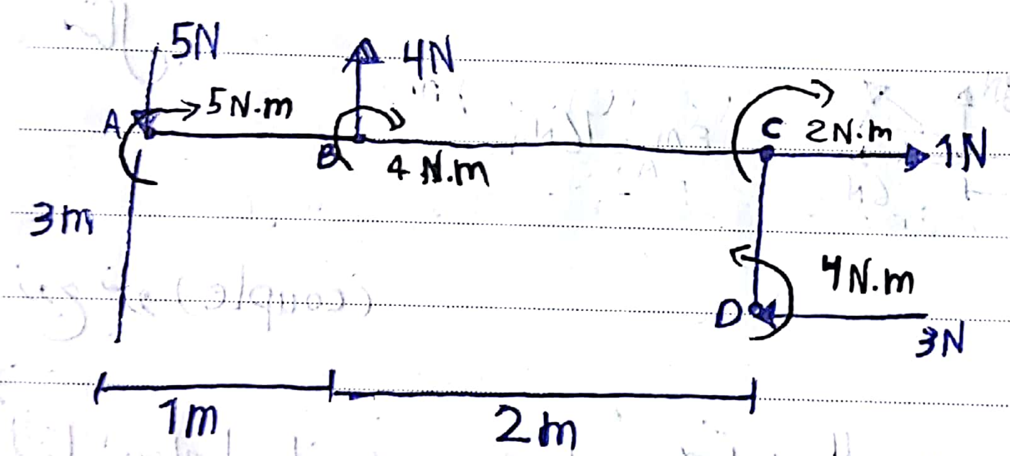
گشتاور (Moment):

نیرو علاوه بر این که تمایل دارد جسم را در راستای خود جابجا کند تمایل به چرخش حول هر محور یا امتدادی که نیرو را قطع نکند و با آن نیز موازی نباشد ایجاد می کند این تمایل به چرخش را گشتاور گویند.

* برای حساب گشتاور برای اینکه در ضرب خارجی $\sin\alpha$ را حذف کنیم d را f را عمودی کنیم

$$\vec{M}_o = \vec{d} \times \vec{F}$$

مثال:



$$\curvearrowleft + M_A = -(1 \times 4) + (3 \times 3) = +5\ N.m$$

$$\curvearrowleft + M_B = -(2 \times 1) + (3 \times 3) = +4\ N.m$$

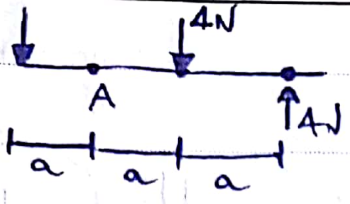
$$\curvearrowleft + M_C = -(5 \times 3) + (2 \times 4) + (3 \times 3) = 2\ N.m$$

$$\curvearrowleft + M_D = (3 \times 1) + (2 \times 4) - (3 \times 5) = -4\ N.m$$

AVANG

Scanned by CamScanner

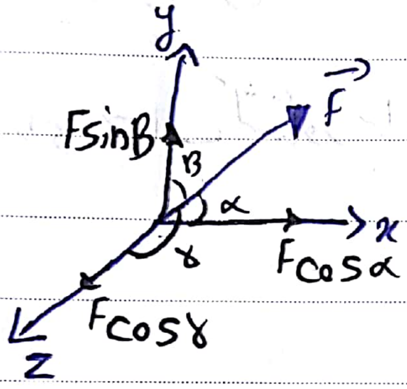
مثال.



$\curvearrowleft + \Sigma M_A = -4 \times a + ۴a - 8a = -۸a$ N.m

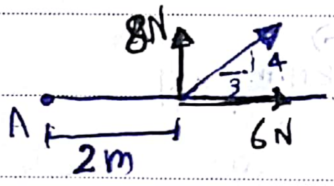
قضیه: (Varignon's Theorem).

گشتاور یک نیرو نسبت به یک نقطه برابر است با جمع جبری گشتاورهای مؤلفه‌های نیرو نسبت به همان نقطه.



$$\vec{F} = (F\cos\alpha)\vec{i} + (F\cos\beta)\vec{j} + (F\cos\gamma)\vec{k}$$

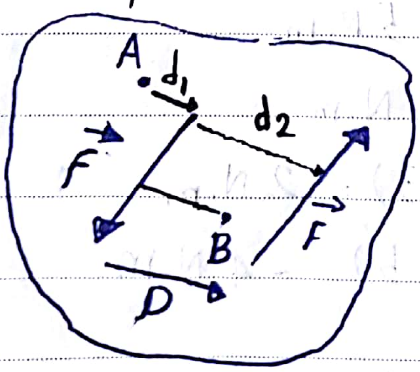
مثال.



$\Sigma M_A = 16$ N.m

زوج نیرو (couple)

گشتاور حاصل از دو نیروی مساوی مختلف الجهت و غیرهم راستای موازی را یک زوج نیرو گویند.



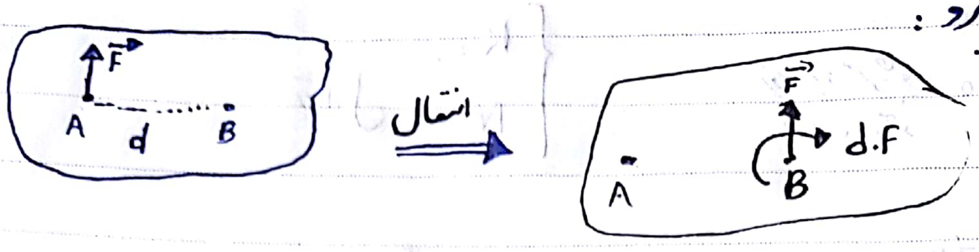
$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = +(d_1 . F) - (d_2 . F) = F(d_1 - d_2) = F.D$$

$$\curvearrowleft + \Sigma M_B = -(d_3 . F) - (d_4 . F) = -F(d_3 + d_4) = F.D$$

Avang Notebook

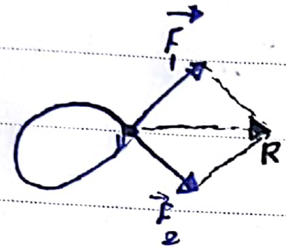
Scanned by CamScanner

انتقال نیرو:



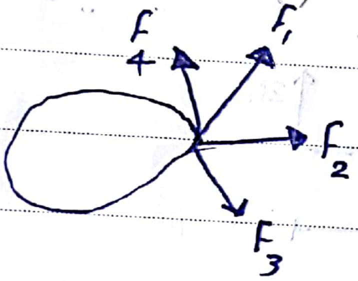
برآیند مجموعه های نیرویی (Resultant of force systems)

حالت 1: متقارب باشند:



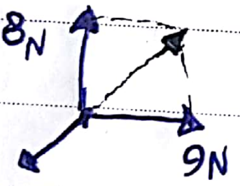
الف) دو نیرو داشته باشیم.

$$|R| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$



ب) n نیرو داریم

روش حل ← تجزیه می کنیم نیروها را بعد برآیند می گیریم

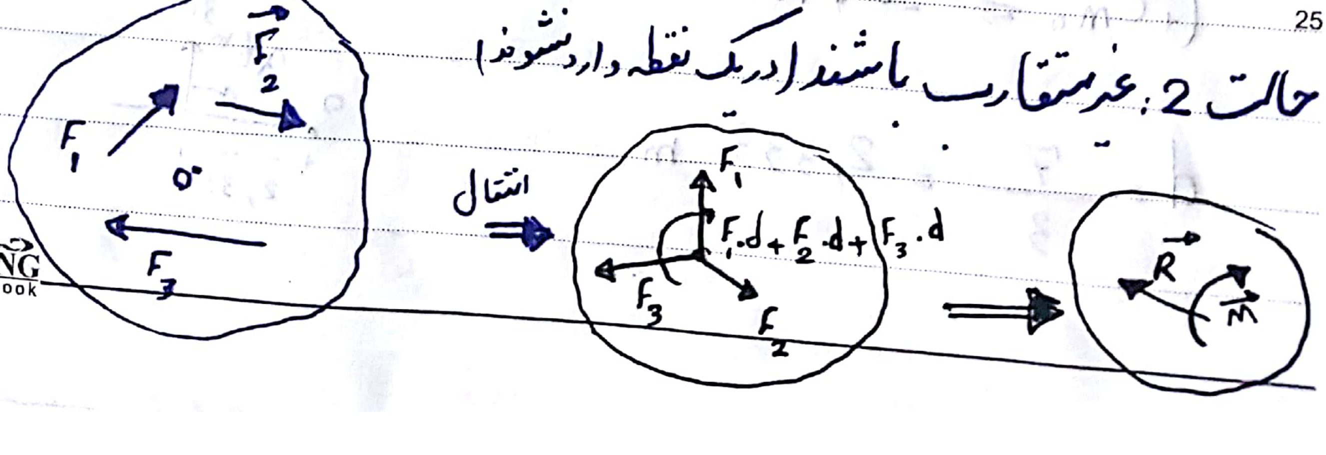


ج) دو نیرو عمود بر هم باشند.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{8}{9} \rightarrow \alpha = tg^{-1}\, 8/9$$

حالت 2: غیرمتقارب باشند (در یک نقطه وارد نشوند)

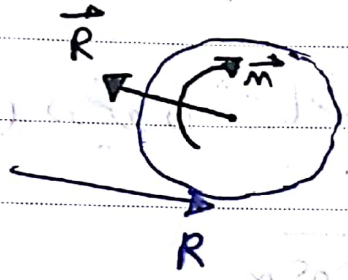


$\begin{cases} R = 0 \\ M \neq 0 \end{cases}$ زوج نیرو سرجای خودش می‌چرخد

$\begin{cases} R = 0 \\ M = 0 \end{cases}$ تعادل

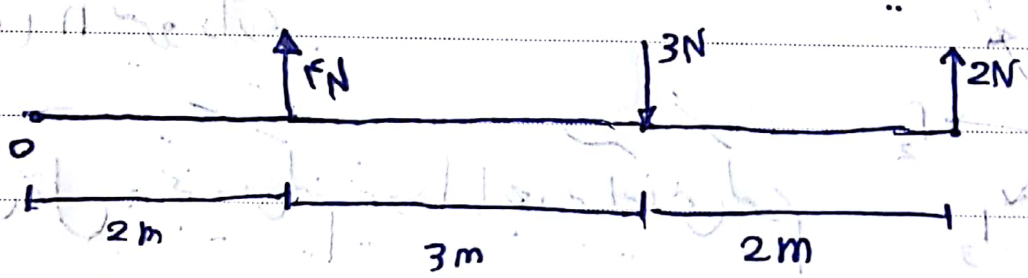
$\begin{cases} R \neq 0 \\ M = 0 \end{cases}$ حالت نیرو جابجا می‌شود بدون گشتاور

$\begin{cases} R \neq 0 \\ M \neq 0 \end{cases}$ عادی



$$d = \frac{M}{R}$$

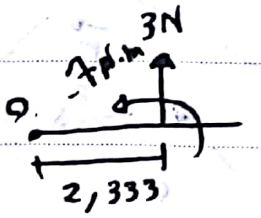
برآیند نیروهای زیر را بدست آورید.



$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = \overset{+}{\uparrow} \Sigma F_y = +4 - 3 + 2 = +3N \\ R_z = 0 \end{cases}$$

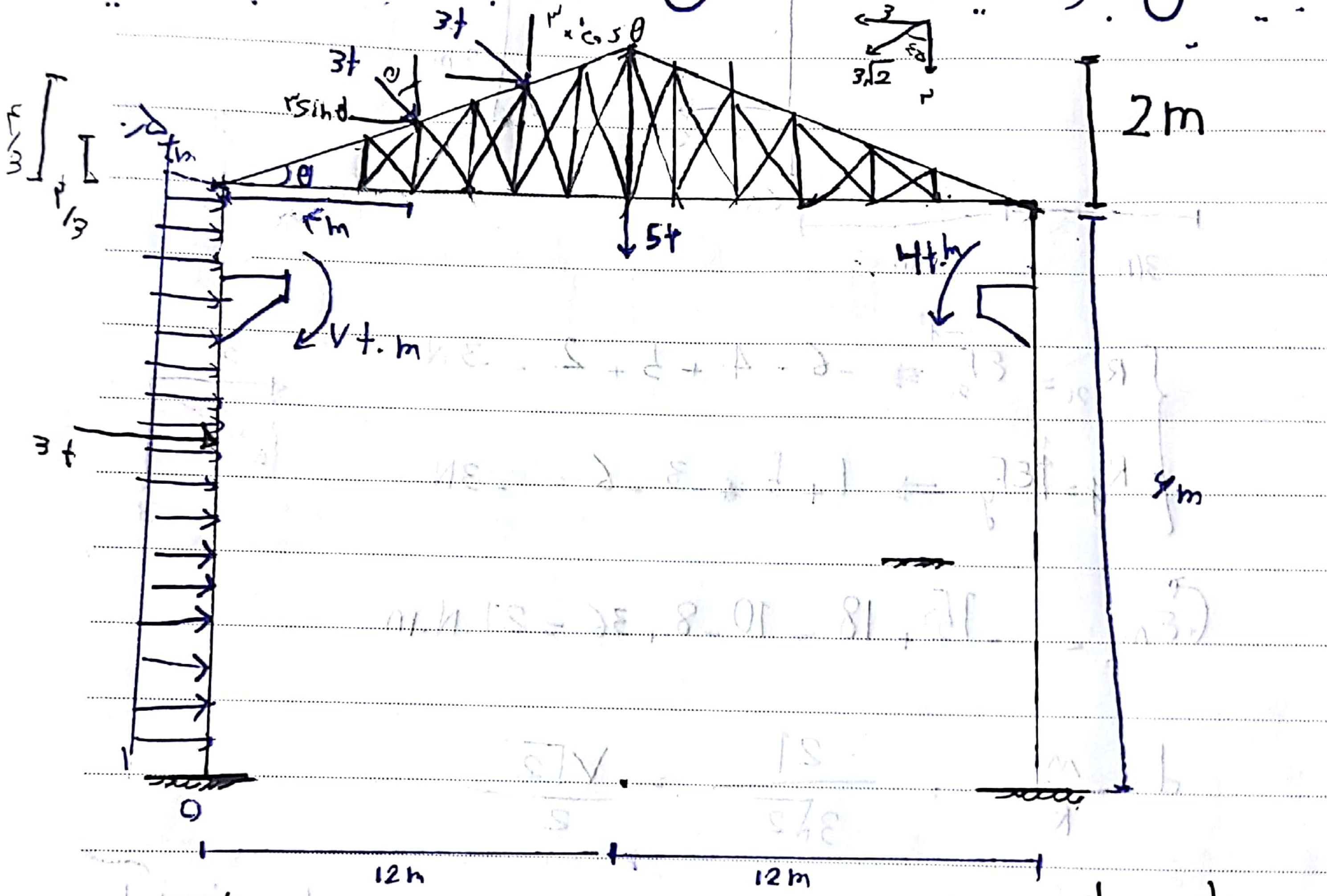
$$\circlearrowleft + \Sigma M_o \Rightarrow -8 + 15 - 14 = -7 \text{ N.m}$$

$$d = \frac{7}{3} = 2{,}333 \text{ m}$$



Scanned by CamScanner

قاب یک سالن صنعتی مطابق شکل تحت اثر نیروهای نشان داده شده است. نیروهای مایل بر سطح شیب دار عمودند. مقدار و محل دقیق برآیند این مجموعه را یافته و فاصله آن نسبت به نقطه O را بدست آورید.



$$R_x = \sum F_x = 3 + ۲ \times 3 \times \sin\theta$$

$$R_y = \sum F_y = ۵ + ۲ \times ۳ \times \cos\theta \qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\theta = tg^{-1}\frac{۲}{12} = tg^{-1}\frac{1}{6}$$

$$\theta = ۰/۱۶\ rad$$

$$\sum M_o = +9 + 7 - 4 + 12\cos\theta + (6 + \tfrac{2}{3})\,3\sin\theta + 24\cos\theta + (6 + \tfrac{۴}{3})\,۳\sin\theta + ۴ = ۷۲ + ۳۴\cos\theta + ۴۲\sin\theta =$$

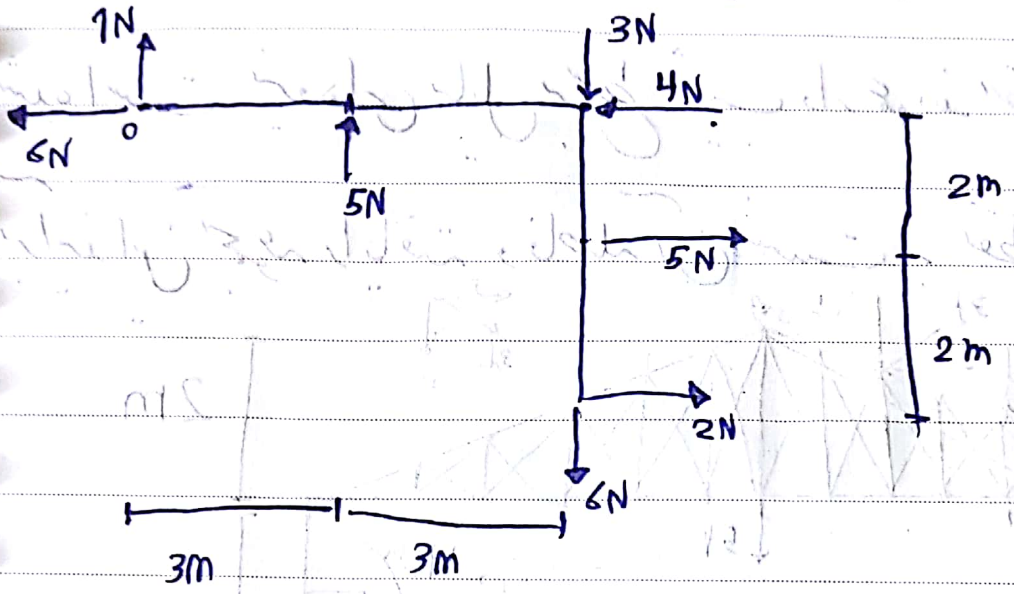
(۰/۹۸ ، ۰/۱۵)

$$d = \frac{M}{R} = \frac{21}{3\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \rightarrow 3/5\sqrt{2}$$

AVANG Notebook

Scanned by CamScanner

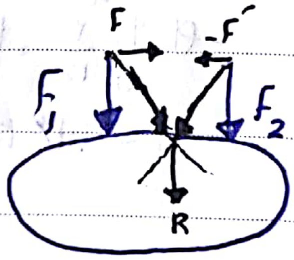
#. مقدار و محل نیروی برآیند را بدست آورید.



$$\begin{cases} R_x = \overset{\rightarrow}{\Sigma F_x} \Rightarrow -6 - 4 + 5 + 2 = -3\,N \\ R_y = \uparrow \Sigma F_y \Rightarrow 1 + 5 - 3 - 6 = -3\,N \end{cases}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_o = -15 + 18 - 10 - 8 + 36 = 21\ N.m$$

$$d = \frac{M}{R} = \frac{21}{3\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$



برآیند نیروهای موازی.

تعادل اجسام صلب (Equilibrium of rigid body)

جسم صلب :

جسمی است که در اثر نیروهای وارده فاصله نقاطش تغییری نکند.

مجموعه مکانیکی :

عبارت است از یک جسم یا مجموعه ای از اجسام که بتوانند آن ها را از سایر اجسام محیط جدا کرد.

- نیرو
  - خارجی
    - action
    - reaction
  - داخلی

نیروهای عمل (action)

نیروهایی هستند که توسط عامل خارجی وارد می شوند و در جسم تمایل به حرکت ایجاد می کنند.

نیروهای عکس العمل (reaction)

نیروهایی هستند که توسط زمین و سایر اجسام تکیه گاهی به جسم وارد می شوند و

AVANG

Scanned by CamScanner

جسم را به باقی ماندن در مکان اولیه خود مقید می کنند.

دیاگرام جسم آزاد (Free body diagram)

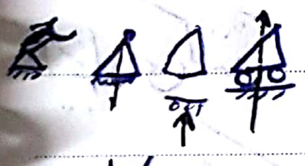
عبارتست از مجموعه یا جسم جدا شده از کلیه اجسام پیرامونی و مرتبط با آن که توسط یک نمودار نشان داده می شود.

مراحل رسم دیاگرام آزاد:

1. انتخاب جسمی که باید از محیط جدا شود. 2. رسم حدود خارجی جسم انتخاب شده 3. نشان دادن کلیه نیروهای خارجی انتخاب وارد به جسم. 4. نشان دادن ابعاد، فواصل محور مختصات در صورت لزوم.

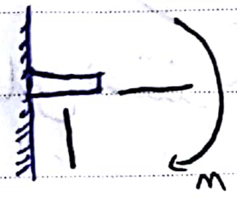
انواع نیروی های عکس العمل:

1. تکیه گاه یک مجهولی (غلتکی) (Roller support) (بدون اصطکاک)



2. تکیه گاه دو مجهولی (مفصلی) (Pinned support) (با اصطکاک)

3. تکیه گاه سه مجهولی (Fixed support)



AVANG

Scanned by CamScanner

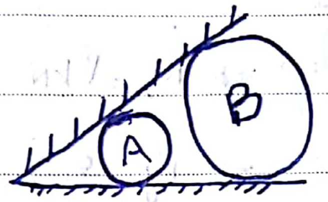
شرایط تعادل

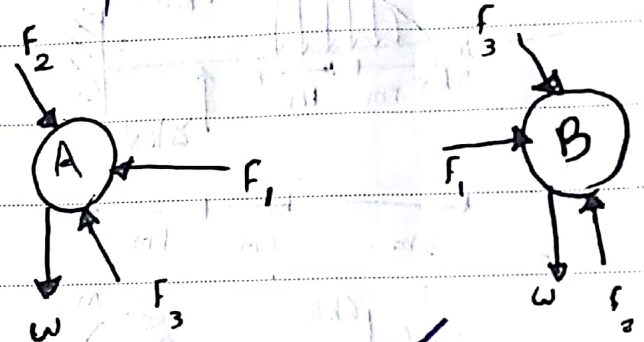
$$R = 0 \rightarrow \begin{cases} (1)\ \Sigma F_x = 0 \\ (2)\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

سه مجهولی

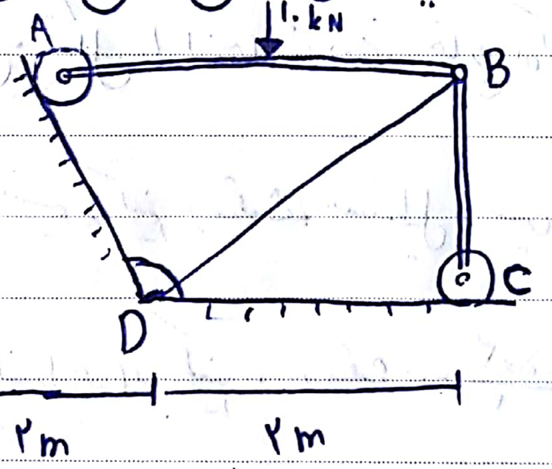
$$M = 0 \rightarrow (3)\ \Sigma \vec{M}_O = 0$$

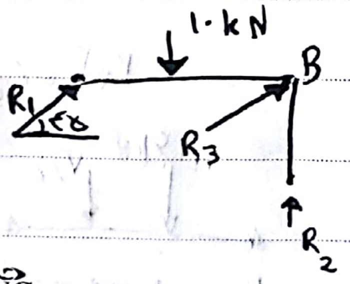
مثال ؛ مطلوبست رسم دیاگرام آزاد اجسام نشان داده شده.





مثال ؛ عضو شکسته ABC صلب می باشد و توسط تکیه گاه های ABC و بوسیله پاندولی BD نگه داشته شده است نیروهای عکس العمل های تکیه گاهی را حساب کنید.





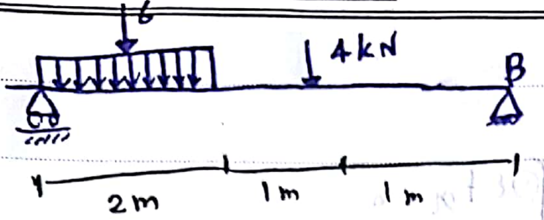
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + R_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow R_1 = -R_3 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 + R_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = 10 \\ \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -20 + 4\frac{\sqrt{2}}{2} R_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{10}{2\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$R_3 = -5\sqrt{2}$$

AVANG Notebook

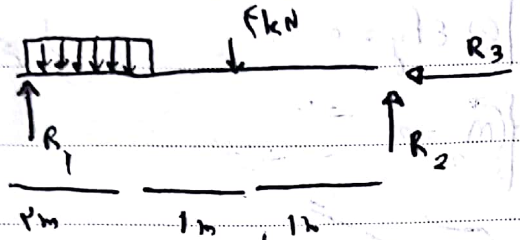
Scanned by CamScanner

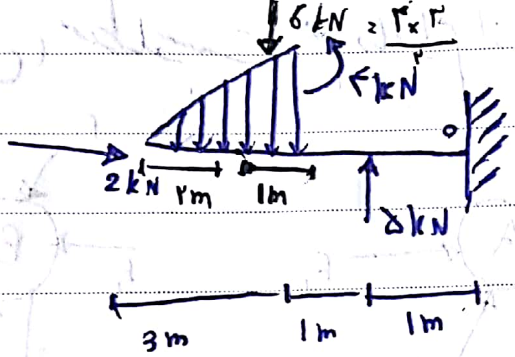


مثال)

$$\begin{cases} \overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_3 = 0 \\ \overset{+}{\uparrow} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_1 - 4 - 6 + R_2 = 0 \Rightarrow \\ R_1 + R_2 = 10 \\ \Sigma M_B = 4R_1 - 18 - 4 \Rightarrow R_1 = \frac{22}{4} = 5.5 \end{cases}$$

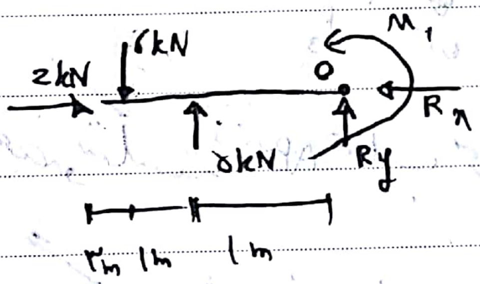
$R_2 = 4.5$

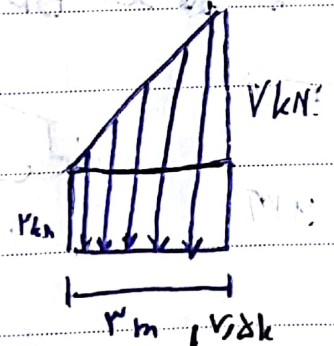




مثال)

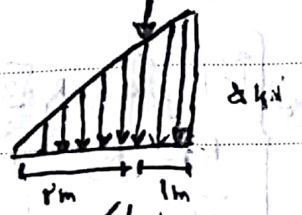
$$\begin{cases} \overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_x = 2\,kN \\ \overset{+}{\uparrow} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_y = 6 - 5 \Rightarrow 1\,kN \\ \overset{+}{\circlearrowleft} \Sigma M_o = 0 \Rightarrow -M_1 - 18 + 5 \Rightarrow M_1 = -13 \end{cases}$$

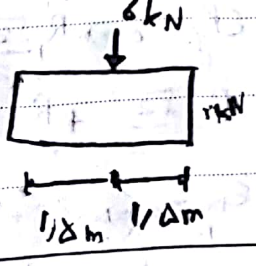




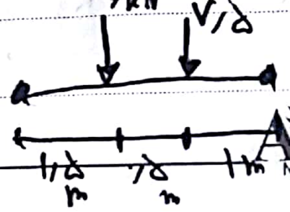
روش حل: شکل را از حالت ذوزنقه خارج می‌کنیم و به دو قسمت تقسیم می‌کنیم (مثلث + مستطیل) سپس جداگانه نیروهای متمرکز را حساب کنیم. در مثلث: $\frac{5\times3}{2} =$

در مستطیل $2\times3 = 6\,kN$

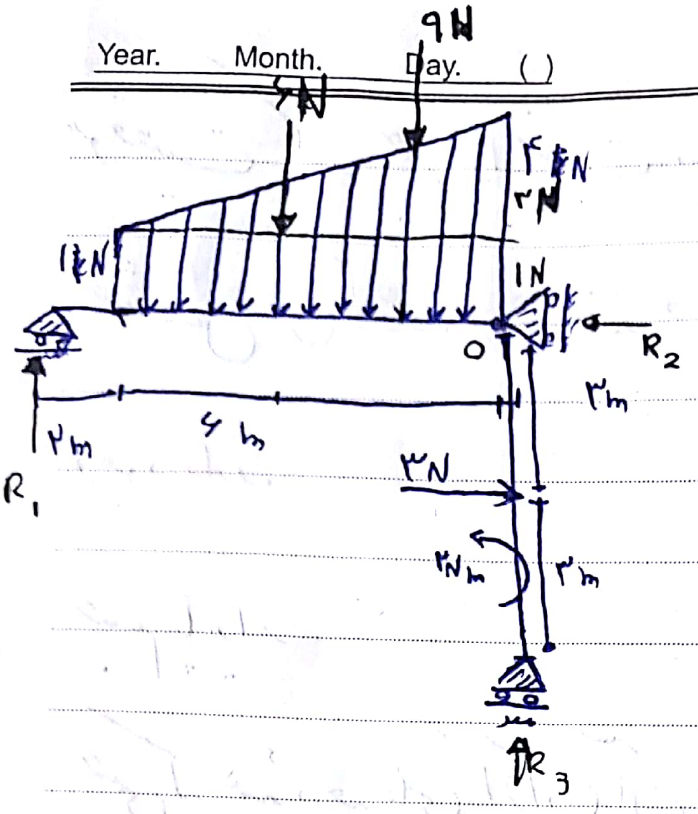




دیاگرام آزاد ⇒



برآیند نیروهای زیر را بدست آورید.



$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_2 = ۳\ N \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_3 = ۱۵\ N \\ \Sigma M_O = 0 \Rightarrow +۲\times۹ + ۱۸ + ۱۸ = ۸R_1 \\ \Rightarrow R_1 = \frac{۴۷}{۸} = ۵/۸۷۵ \end{cases}$

$R_3 = ۸/۱۲۵$

بیان های مختلف تعادل در صفحه:

2D تعادل
$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_{xy} = 0 \end{cases}$ → 3D $\begin{cases} R = 0 \rightarrow \begin{cases} R_x = \Sigma F_x = 0 \\ R_y = \Sigma F_y = 0 \\ R_z = \Sigma F_z = 0 \end{cases} \\ M_{xyz} \rightarrow \begin{cases} M_x = M_{yz} = 0 \\ M_y = M_{xz} = 0 \\ M_z = M_{xy} = 0 \end{cases} \end{cases}$

یا

2D $\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \end{cases}$

2D $\begin{cases} \Sigma M_A = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \\ \Sigma M_C = 0 \end{cases}$

پایداری و ناپایداری اجسام صلب:

درجات آزادی:

کمیت های مستقل از یکدیگر یا به تعبیر دیگر مختصات مستقلی هستند که

AVANG Notebook

Scanned by CamScanner

موقعیت یک جسم را نسبت به سایر اجسام محیط به طور کامل و دقیق مشخص می کنند. در صفحه 3 درجه آزادی و در فضا (3D) ۶ درجه آزادی وجود دارد.

جسم پایدار

جسمی که همهٔ درجه های آزادی آن مهارشده باشد، جسم پایدار گویند.

جسم ناپایدار { ناپایداری مکانیکی
" " هندسی

ناپایداری مکانیکی.

زمانی به وجود می آید که در صفحه کمتر از ۳ قید تکیه گاهی داشته باشیم و در فضا کمتر از ۶ قید تکیه گاهی

ناپایداری هندسی:

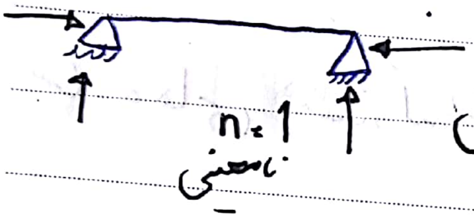
زمانی به وجود می آید که تکیه گاه همهٔ درجات آزادی را پوشش نمی دهد (همه عکس العمل های تکیه گاهی موازی هستند)

معینی و نامعینی اجسام

اگر تعداد معادلات مستقل تعادل جسم صلب برای حل مسئله کفایت کند مجموعه معین (قابل حل) هست در غیر این صورت نامعین است.

* اگر جسم پایدار بود سپس می رویم سراغ معینی یا نامعینی.

مثال. پایداری یا ناپایداری جسم زیر را حساب کنید.



حل، ۴ تکیه گاه، پس از لحاظ مکانیکی پایدار و چون متقارب نیستند پس از لحاظ هندسی هم پایدار است. معین هم است.

تحلیل خرپاها و بارها

سازه (structure)

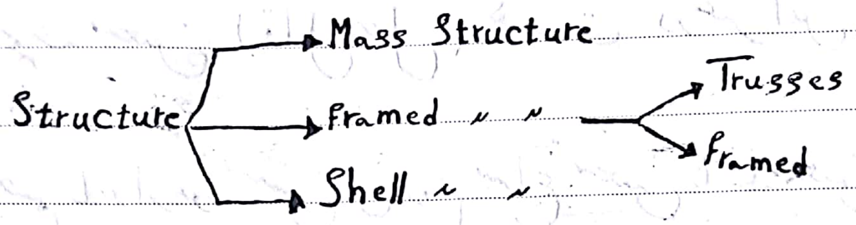
عبارت است از یک عضو یا مجموعه ای از اعضا که به منظور تحمل و انتقال نیرو بکار می رود.

مراحل تحلیل سازه

AVANG Notebook
Scanned by CamScanner

1. بررسی و تأمین پایداری سازه 2. محاسبهٔ عکس العمل های تکیه گاهی

3. محاسبه نیروهای داخلی 4. محاسبهٔ تغییر شکل های سازه



سازه های وزنی
سازه های فرمی
سازه های پوسته ای

1. سازه های وزنی

سازه های هستند که مقاومت و پایداری آن ها به وزنشان بستگی دارد

2. سازه های فرمی (قاب بندی)

سازه هایی هستند که توسط اتصال مناسب به هم وصل شوند و پایداری آن در مقابل نیروهای وارد شده به آن مقدار کمی می باشد و اعضای سبکی دارند

3. سازه های پوسته ای (محافظ)

سازه هایی هستند که به صورت یک صفحهٔ پیوسته در مقابل نیروهای وارده مقاومت می کنند مثل سیلوها.

خرپاها (Trusses)

سازه ایست متشکل از تعدادی جسم صلب که توسط مفصل های بدون اصطکاک به هم متصل شده اند و نیروهای وارد به آن فقط نیروهای متمرکزی هستند که فقط در مفصل ها تحمل کند در واقع بین مفصل ها و بر روی اعضا هیچگونه نیروی اعمال نمی گردد.

روش های تحلیل خرپا:

To Solve Trusses
- → Joint Method — روش مفصلی (گره)
- → Section Method — روش برش (مقطع)

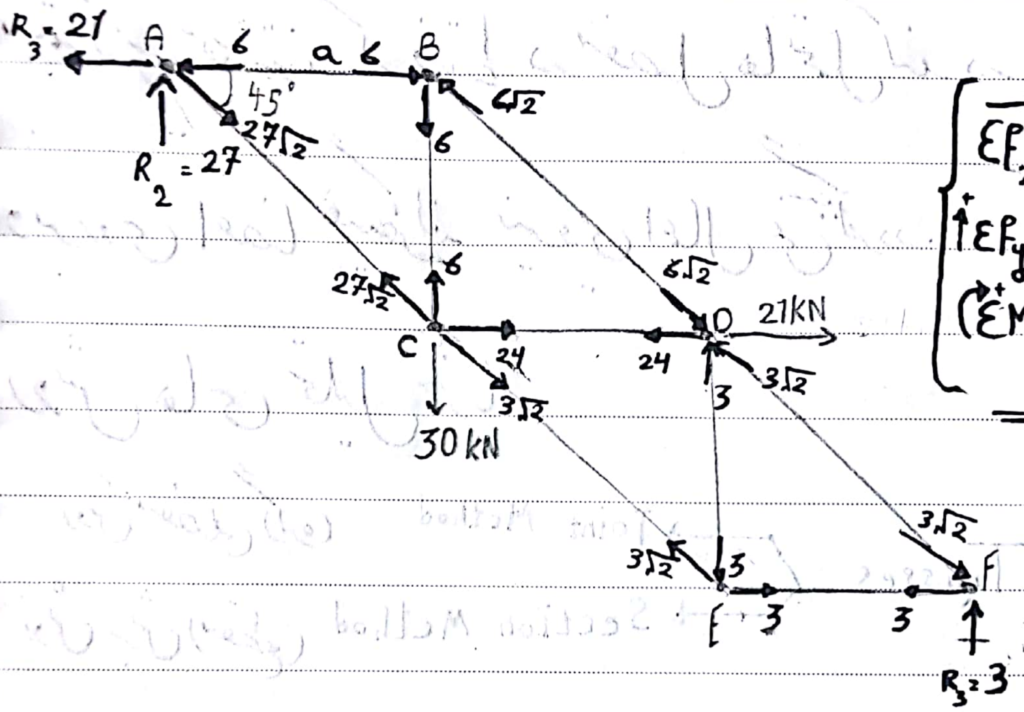
روش مفصل (گره)

اساس روش گره بر آن است که دیاگرام آزاد مفصل های خرپا به طور جداگانه ترسیم می گردد و با اعمال معادلات تعادل مجهولات مربوط به هر دیاگرام آزاد یافته می شود. از آنجا که دیاگرام آزاد هر مفصل یکی از حالات خاصی است که همهٔ نیروها در آن متقارب هستند حداکثر دو معادلهٔ مستقل تعادل

Scanned by CamScanner

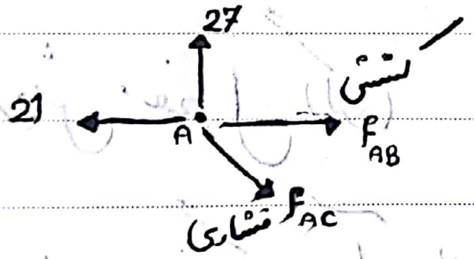
می توان برای آن نوشت لذا در ترتیب انتخاب مفصل ها باید دقت کرد که در دیاگرام آزاد هر مفصل حداکثر دو مجهول ظاهر گردد.

مثال: نیروهای داخلی را در خرپای نشان داده شده بدست آورید.

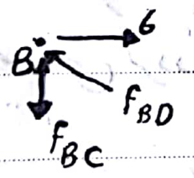


$$\begin{cases} \overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \longrightarrow R_3 = -21\,kN \\ \overset{+}{\uparrow}\Sigma F_y = 0 \longrightarrow R_1 + R_2 = 30\,kN \\ \circlearrowleft^{+}\Sigma M_A = 0 \longrightarrow 30a - 21a = 3aR_1 \end{cases}$$

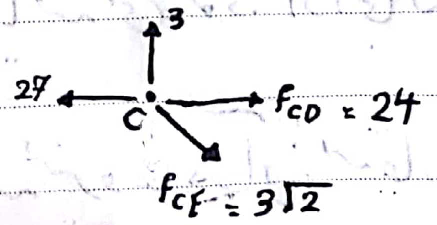
$$\Longrightarrow R_1 = 3\,kN \;,\; R_2 = 27\,kN$$

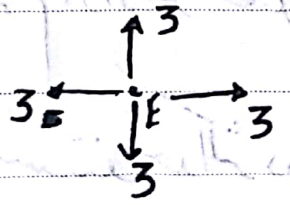


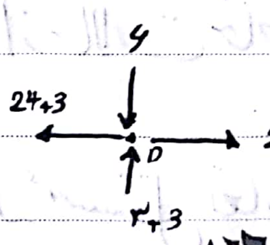
$$\begin{cases} \overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \longrightarrow 21 = 27 + F_{AB} \longrightarrow F_{AB} = -6 \\ \overset{+}{\uparrow}\Sigma F_y = 0 \longrightarrow 27 = \frac{\sqrt{2}}{2} F_{AC} \longrightarrow F_{AC} = 27\sqrt{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \longrightarrow 6 = \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} \longrightarrow F_{BD} = 6\sqrt{2} \\ \overset{+}{\uparrow}\Sigma F_y = 0 \longrightarrow F_{BC} = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow F_{BC} = 6 \end{cases}$$



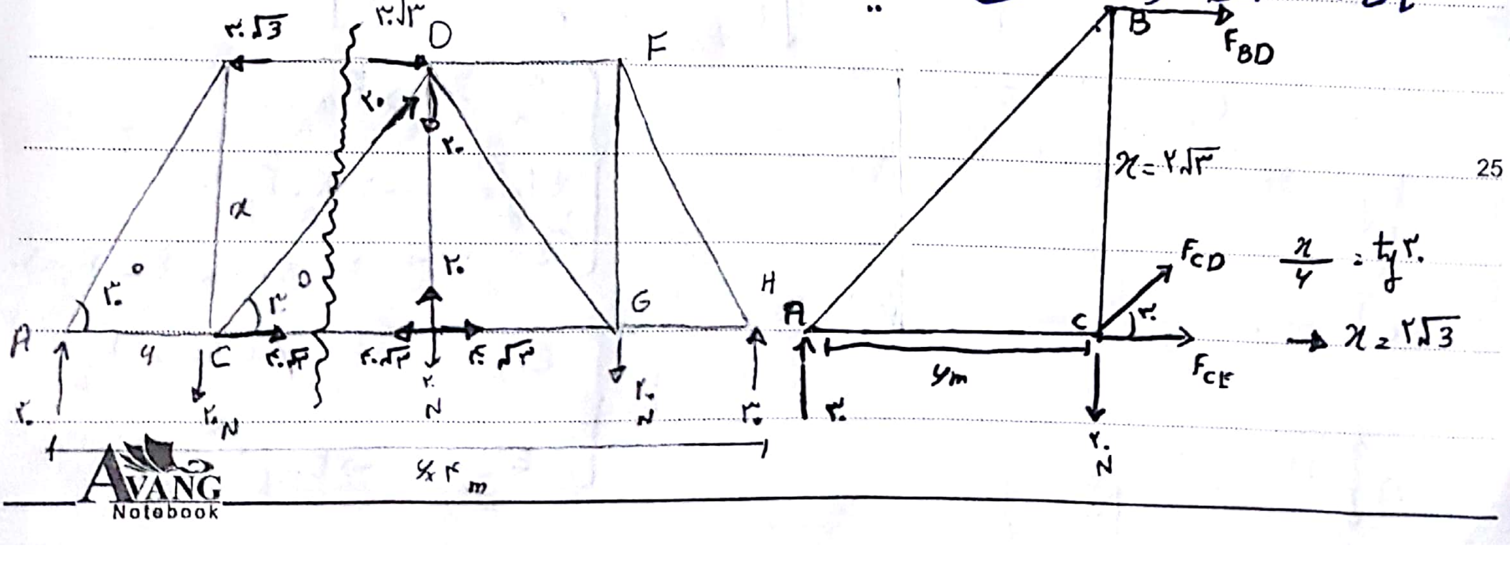




روش مقطع (Section Method)

اساس روش مقطع بر آن است که با یک برش فرضی کل خرپا را به هر بخش مجزا از هم تقسیم کنیم سپس با رسم دیاگرام آزاد یکی از آن بخش ها و اعمال معادلات مستقل تعادل نیروهای داخلی اعضایی را که توسط آن برش فرضی بریده شده بودند را محاسبه کنید از آن جا که در دیاگرام آزاد مذکور در حالت کلی حداقل سه معادله مستقل تعادل می توان نوشت لذا باید دقت کرد که برش فرضی در جایی زده شود که حداکثر سه عضو مجهول را قطع کند.

مثال، در خرپای نشان داده شده نیروهای داخلی اعضای CE ، DE ، DF را بدست آورید.



$$\begin{cases} \overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \longrightarrow F_{BD} + F_{CE} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{CD} = 0 \\ \overset{+}{\uparrow}\Sigma F_y = 0 \longrightarrow 30 + \frac{F_{CD}}{2} = 20 \longrightarrow F_{CD} = -20 \\ \Sigma M_C = 0 \longrightarrow 30 \times 6 + 2\sqrt{3} F_{BD} = 0 \longrightarrow F_{BD} = \frac{-90}{\sqrt{3}} = -30\sqrt{3} \end{cases}$$

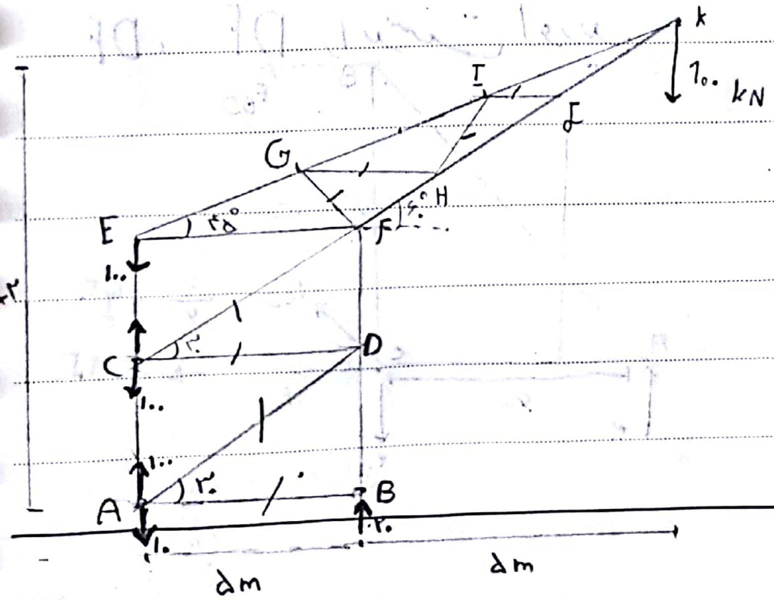
فشاری $F_{CE} = 40\sqrt{3}$ و کششی $F_{DF} = F_{BD} = 30\sqrt{3}$ N و فشاری $F_{DE} = 20$ N

اعضای صفر نیرویی

اعضایی که نیروی داخلی آن ها صفر است.

* اگر به مفصلی از خرپا فقط دو عضو متصل باشد که در یک راستا نباشند و هیچ نیروی خارجی به آن اعمال نگردد نیرو داخلی هر دو عضو برابر صفر خواهد بود

* اگر به مفصلی از خرپا فقط سه عضو متصل باشد که فقط دو تا از آن ها در یک راستا باشند و هیچ نیروی خارجی نیز به آن مفصل اعمال نگردد نیرو داخلی عضو سوم صفر خواهد بود.



$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \longrightarrow R_{x_A} = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \longrightarrow R_A + R_B = 100 \\ \Sigma M_A = 0 \longrightarrow -5 \times R_B + 10 \times 100 \longrightarrow R_B = 20 \end{cases}$$

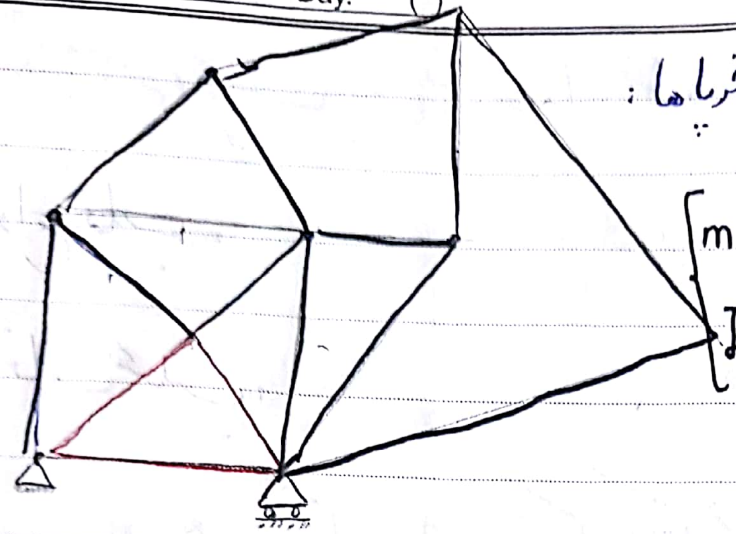
$$E \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \quad F_{Ek} \times \cos\alpha = F_{EF} \\ \Sigma F_y = 0 \longrightarrow F_{Ek} \times \sin\alpha = 100 \end{cases}$$

AVANG Notebook

Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. ( ) Subject:

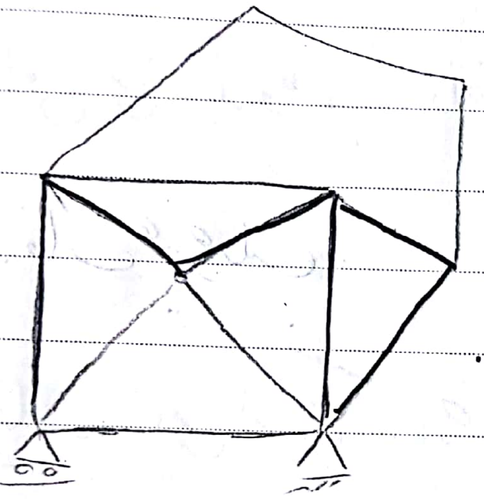
پایداری و ناپایداری داخلی خرپاها :



$m = 16 \qquad m \geq 2J - 3$

$J = 9 \qquad 16 \geq 15$

پایدار و نامعین n=1



$m = 13 \qquad m = 2J - 3$

$J = 8$

ناپایدار از لحاظ هندسی

در اشکال سه بعدی از این فرمول استفاده می کنیم.

$m \geq 3J - 6$

قاب ها (Frames)

قاب ها سازه هایی هستند که حداقل دارای یک عضو چند نیرویی باشند.

* برای رسم دیاگرام آزاد هر یک از اعضای یک قاب ابتدا عضوهای دو نیرویی را در نظر می گیریم سپس سراغ اعضای چند نیرویی می رویم. در اعضای چند نیرویی مثلاً در یک نقطهٔ مفصل دار چون جهت و مقدار نیروهای

AVANG Notebook

Scanned by CamScanner

وارده معلوم نیست این نیروها را با مؤلفه های x و y نشان می دهیم.

انواع قاب:

1. قاب صلب:

قاب هایی هستند که درصورتی که از تکیه گاه های خود جدا شوند صلب باقی می مانند و هندسهٔ داخلی آن ها فرو نمی ریزد.

2. قاب غیرصلب:

قاب هایی هستند که درصورت جدا شدن از تکیه گاه شکل اولیه آن ها به هم می ریزد به تعبیر دیگر پایداری داخلی آن ها توسط مولفه هایی از تکیه گاه های خارجی تعبیه شده است.

روش های تحلیل قاب ها

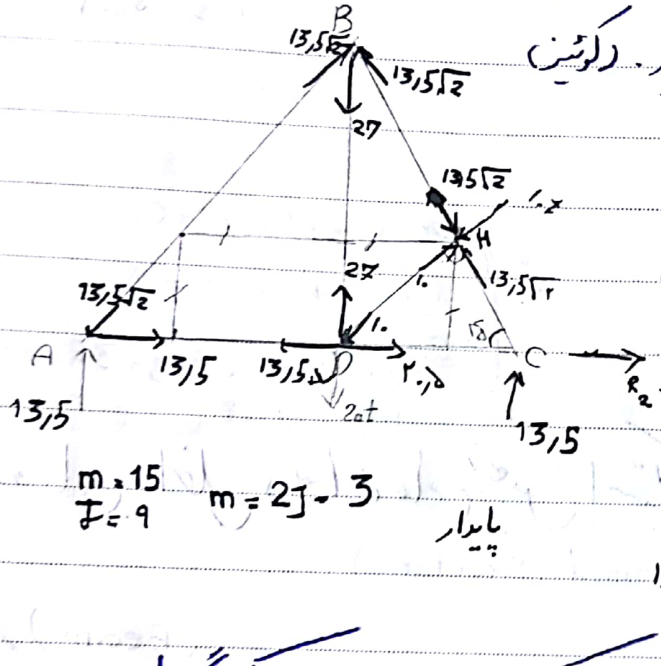
جهت تحلیل قاب های صلب ابتدا با رسم دیاگرام آزاد کل قاب عکس العمل های تکیه گاهی را یافته و سپس با جدا کردن تک تک اعضا از یکدیگر

Scanned by CamScanner

Year. Month. Day. ( ) Subject:

جدا کنیم و سپس با اعمال کلیه معادلات تعادل عکس العمل های کلیه نیروهای داخلی را توأماً بدست آوریم.

#5 نیروهای داخلی جسم زیر را بدست آورید. (کوئیز)



$\sum F_x = 0 \Rightarrow -R_2 - 5\sqrt{2} = 0 \rightarrow R_2 = -5\sqrt{2} = V$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_3 = 20 + 5\sqrt{2} = 27$

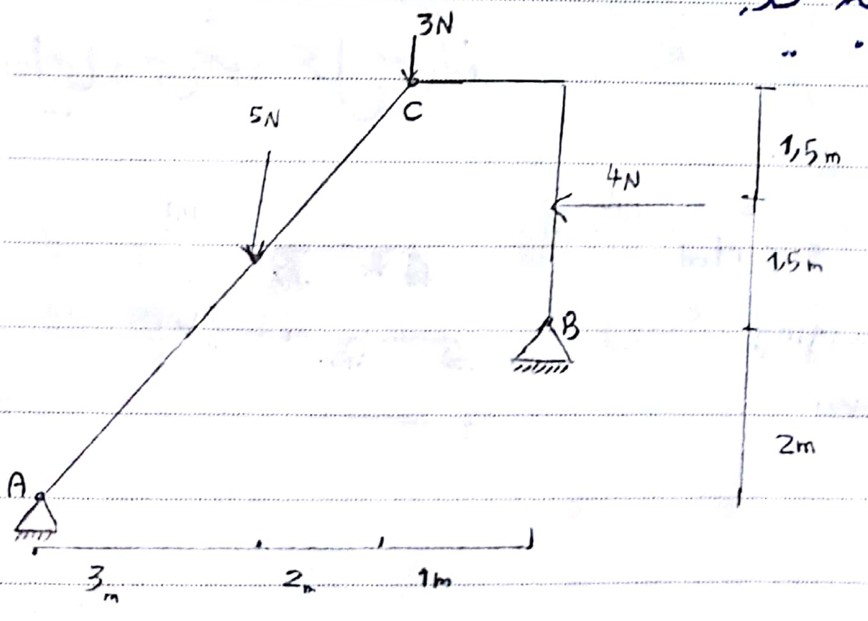
$\sum M_D = 0 \rightarrow 2a \cdot R_3 - 2a \cdot R_1 = 0 \rightarrow R_1 = R_3$

$R_1 = R_3 = 13{,}5$

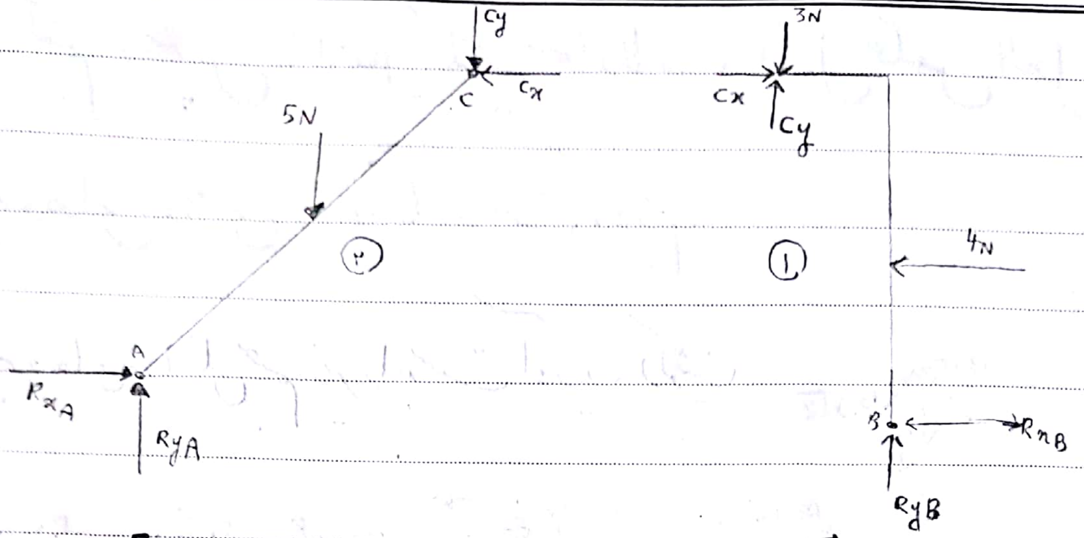
m = 15
J = 9
m = 2J - 3

پایدار

مثال: برای قاب های نشان داده شده عکس العمل های تکیه گاه و نیروهای داخلی را در مفصل C محاسبه کنید.



حل ۱)



2

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow R_{xA} = C_x \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow R_{yA} = C_y + 5 \\ \Sigma M_C = 0 \rightarrow -10 - 5R_{xA} + 5R_{yA} = 0 \end{cases}$$

1

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow R_{xB} + 4 = C_x \\ \uparrow \Sigma F_y = 0 \rightarrow R_{yB} + C_y = 3 \\ \Sigma M_C = 0 \rightarrow +6 - R_{yB} + 3R_{xB} = 0 \end{cases}$$

$C_y = 0$ $C_x = 3$ $R_{xA} = 3$ $R_{xB} = -1$ $R_{yA} = 5$ $R_{yB} = 3$

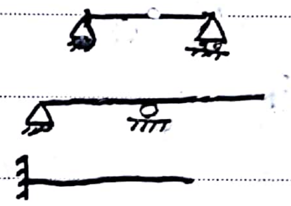
نیروهای داخلی در سازه‌های معین استاتیکی

(Internal Force in Statically determined structure)

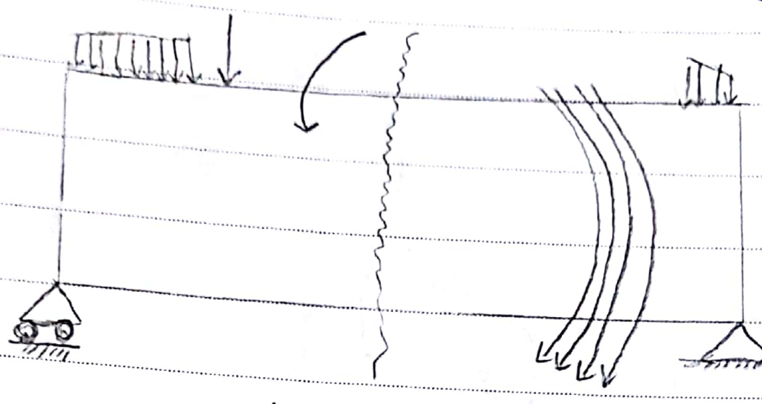
تیر (Beam)،

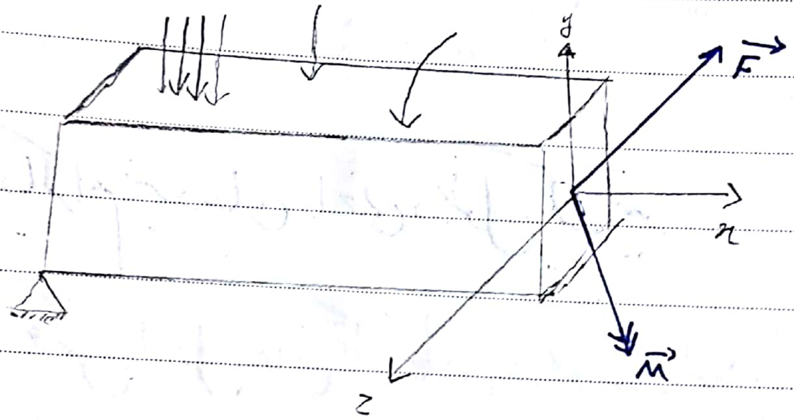
عبارت است از عضو سازه ای که نیروهای وارده را از طریق خمشی که در آن ایجاد می شود تحمل می کند.

Beam :
1. Simply - suported
2. Over hanging
3. Contilever



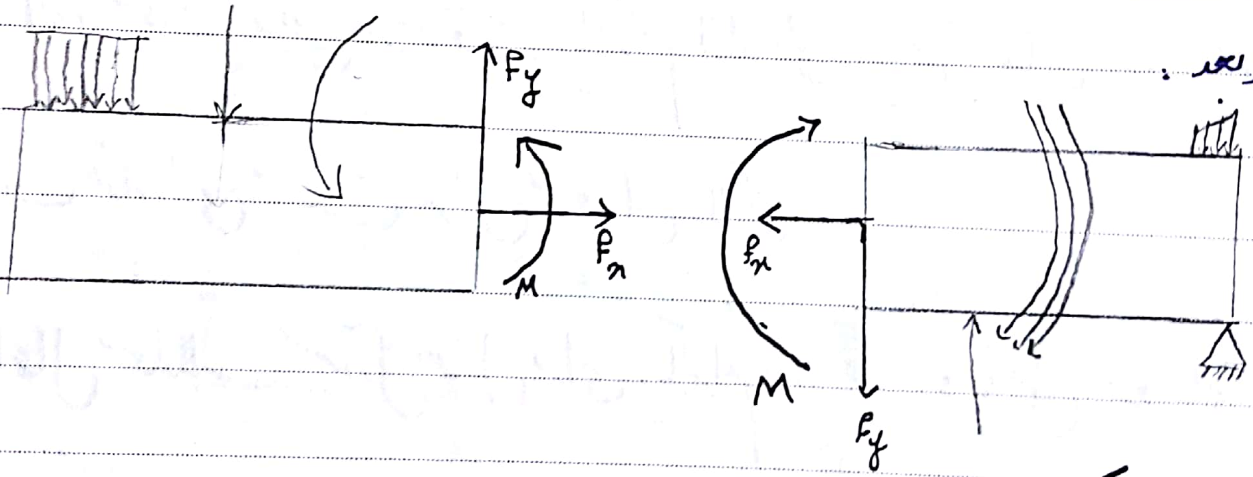
نیروهای داخلی در مقطع یک تیر





حل) در سه بعد

در دو بعد:



axial force — F_x : نیروی کششی / فشاری ، نیروی محوری

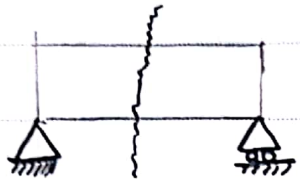
Shear Force — F_y و F_z ، نیروی برشی

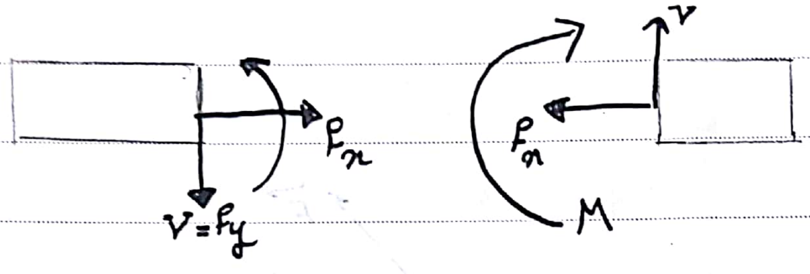
Torsion Moment — M_x : گشتاور پیچشی

AVANG Notebook

Scanned by CamScanner

bending Moment — گشتاور خمشی ، M_y و M_z





نحوه رسم دیاگرام نیروهای داخلی در طول یک تیر

1. محاسبهٔ عکس العمل های تکیه گاهی در صورت لزوم

2. ایجاد مقطعی فرضی در تیر و رسم دیاگرام آزاد یکی از بخش های تیر با رعایت جهات قراردادی مثبت برای نیروهای داخلی

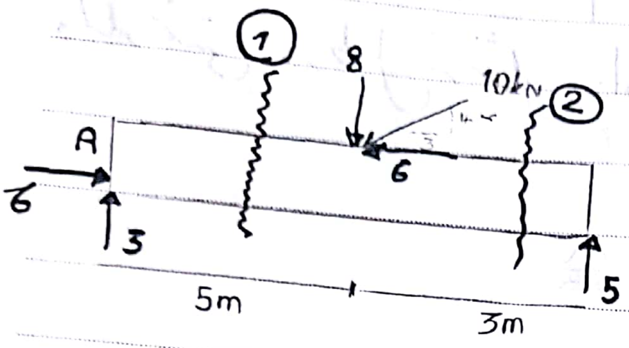
3. اعمال معادلات مستقل تعادل برای دیاگرام آزاد فوق و یافتن نیروهای داخلی در آن مقطع

4. انجام مراحل 2 و 3 برای کلیهٔ بخش های تیر که بین نیروهای متمرکز در محدوده بردارهای گسترده و قبل و بعد از بارهای گسترده قرار دارد.

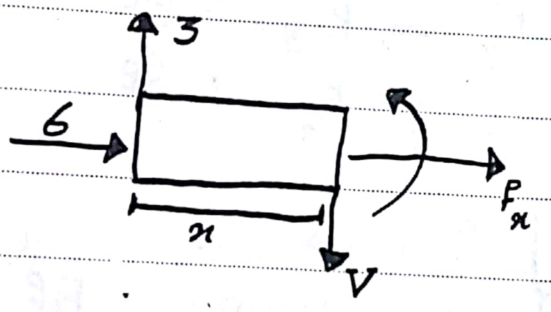
AVANG Notebook

Scanned by CamScanner

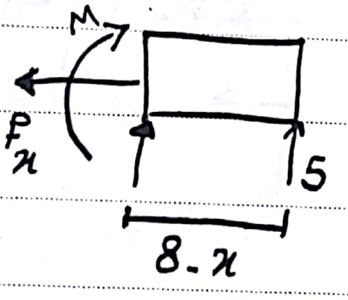
مثال، مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی، در طول تیر نشان داده شود.



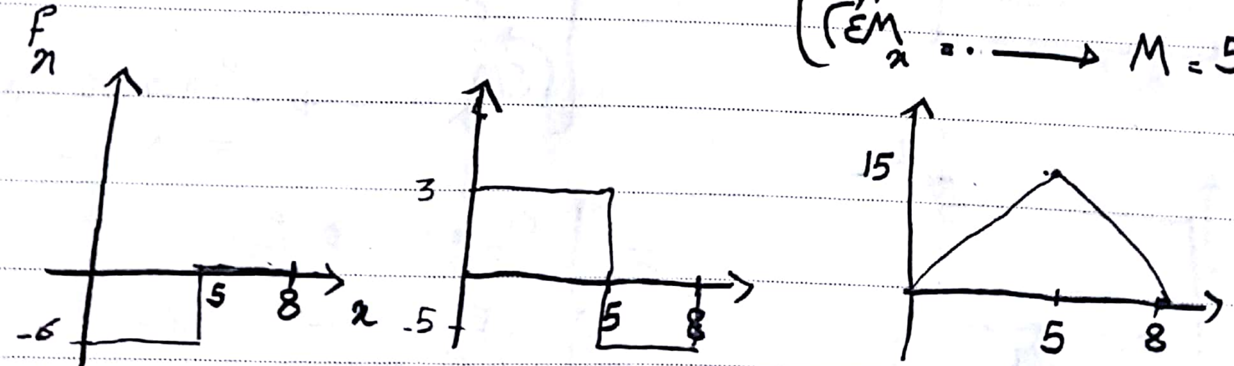
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \longrightarrow R_3 = 6\,kN \\ \Sigma F_y = 0 \longrightarrow R_1 + R_2 = 8 \longrightarrow R_1 = 3\,kN \\ \overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_A = 0 \longrightarrow +40 - 8R_2 = 0 \longrightarrow R_2 = 5\,kN \end{cases}$$



1
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \longrightarrow F_x = -6 \\ \Sigma F_y = 0 \longrightarrow V = 3 \\ \overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_x = 0 \longrightarrow M = 3x \end{cases}$$



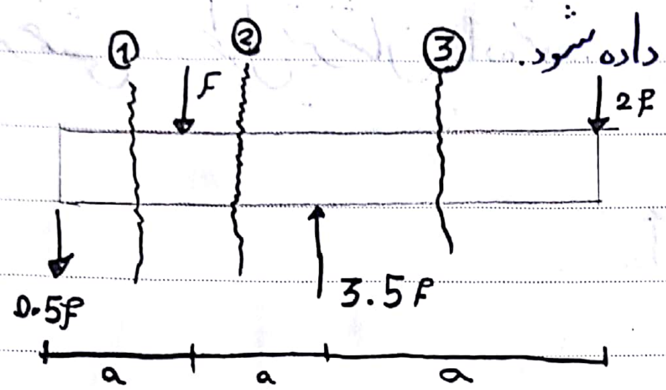
2
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \longrightarrow F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \longrightarrow V = -5 \\ \overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_x = 0 \longrightarrow M = 5(8-x) \end{cases}$$



AVANG Notebook

Scanned by CamScanner

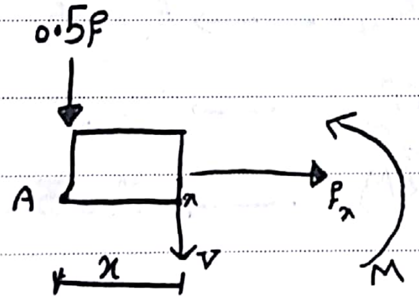
مثال: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی، در طول تیر نشان داده شود.



$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \longrightarrow R_2 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \longrightarrow R_1 + R_3 = 3F \\ \overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_A = 0 \longrightarrow +Fa - 2aR_3 + 6Fa = 0 \end{cases}$$

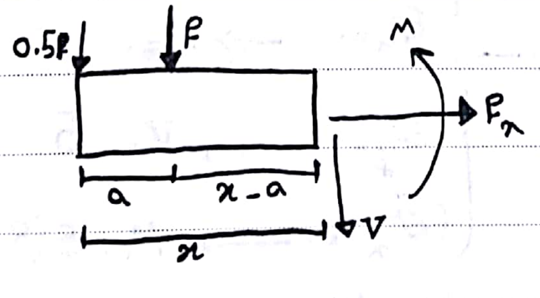
$$\Longrightarrow 7Fa = 2aR_3 \Longrightarrow R_3 = 3{,}5F$$

$$R_1 = -0.5F$$



1

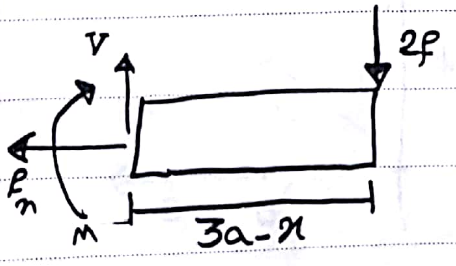
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \longrightarrow F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \longrightarrow V = -0.5F \\ \overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_x = 0 \longrightarrow -0{,}5Fx = M \end{cases}$$



2

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \longrightarrow F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \longrightarrow -0.5F - F = V \longrightarrow V = -1.5F \\ \overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_x = 0 \longrightarrow -F(x-a) - 0.5Fx = M \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = -1.5Fx + Fa$$

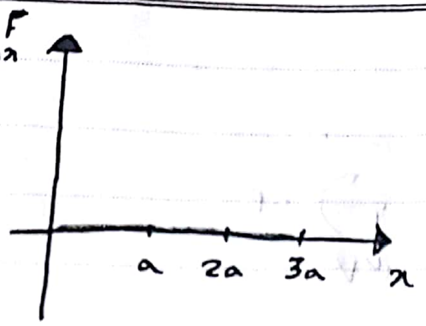


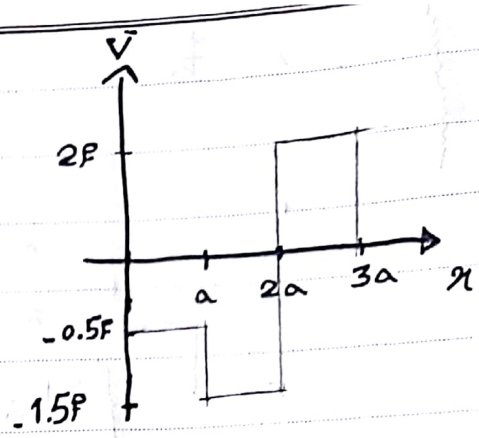
3

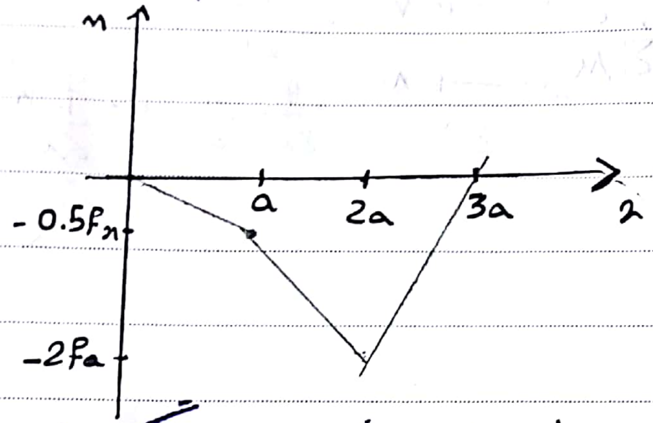
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \longrightarrow F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \longrightarrow V = 2F \\ \overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_x = 0 \longrightarrow M = -2F(3a-x) \end{cases}$$

Notebook

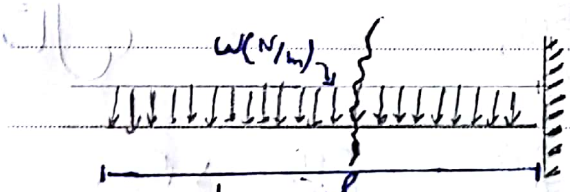
Scanned by CamScanner

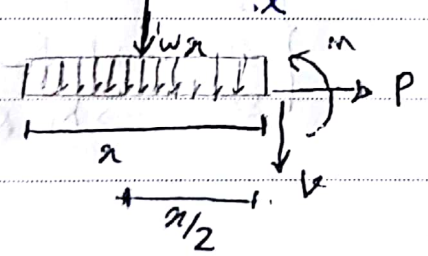






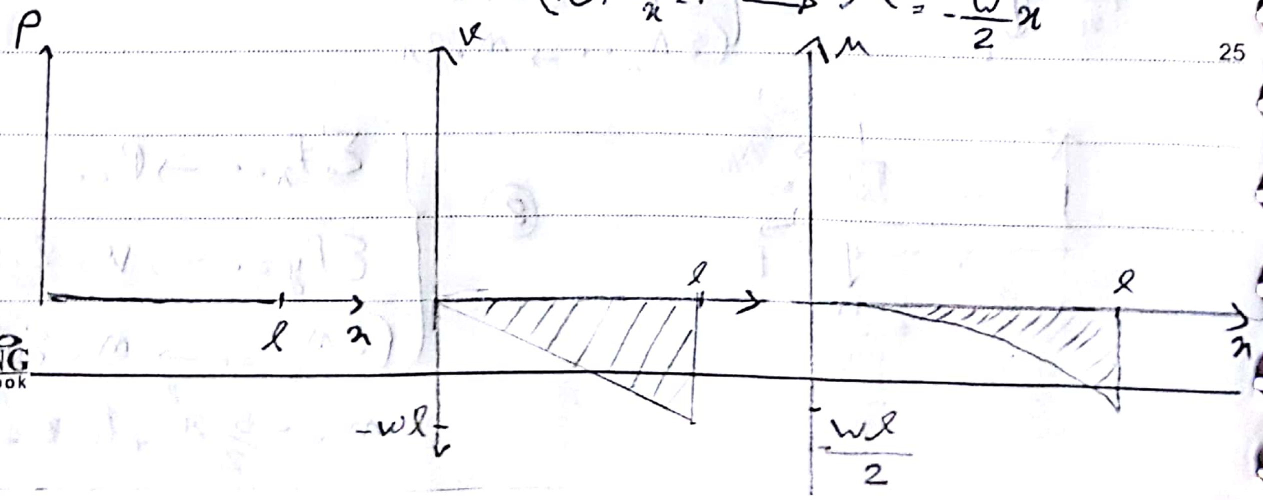
مثال) مطلوبست رسم دیاگرام های نیروهای برشی، محوری و لنگر خمشی در طول تیر زیر





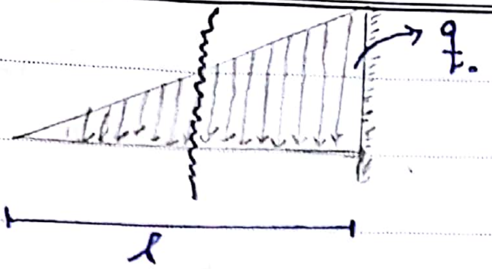
حل)

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \longrightarrow P = 0 \\ \sum F_y = 0 \longrightarrow V = -wx \\ +\circlearrowleft \sum M_x = 0 \longrightarrow M = -\frac{w}{2}x^2 \end{cases}$$

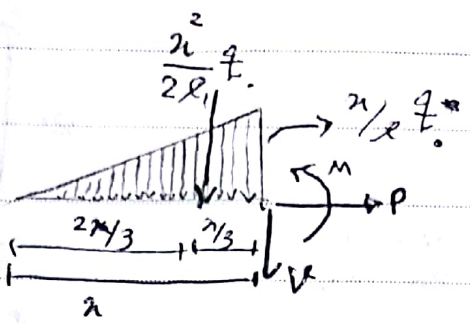


Scanned by CamScanner

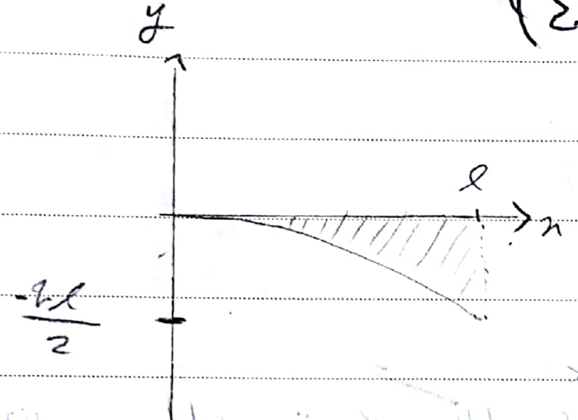
مثال)

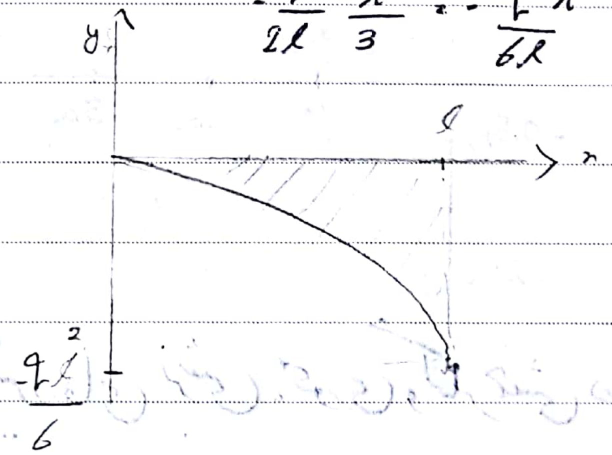


حل)

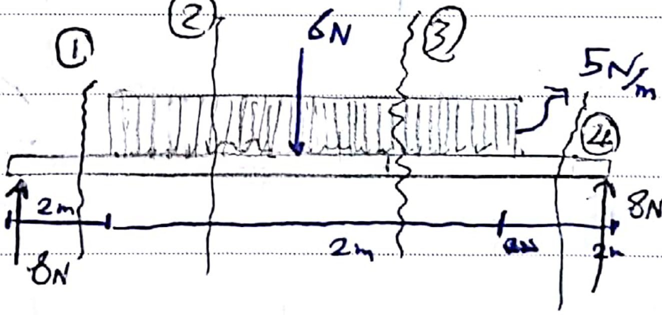


$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow P = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow V = -\frac{q x^2}{2l} \\ \Sigma M_x = 0 \rightarrow M = -\frac{q}{2l}\frac{x^3}{3} = -\frac{q}{6l}x^3 \end{cases}$$

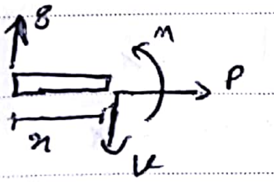




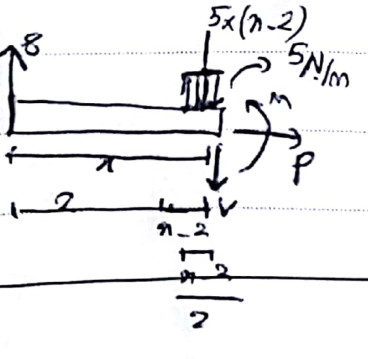
مثال)



$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow R_3 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow R_1 + R_2 = 16 \\ \Sigma M = 0 \rightarrow R_1 = R_2 = 8\,N \end{cases}$$



① $$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow P = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow V = 8 \\ \Sigma M_x = 0 \rightarrow M = 8x \end{cases}$$

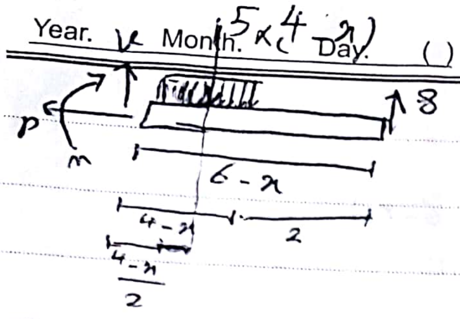


② $$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow P = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow V = 8 - 5(x-2) = -5x + 18 \\ \Sigma M_x = 0 \rightarrow M = 8x - \frac{5}{2}(x-2)^2 \end{cases}$$

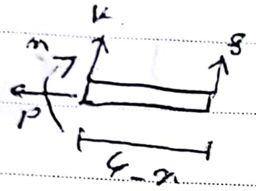
$$M = -\frac{5}{2}x^2 + 18x - 10$$

Scanned by CamScanner

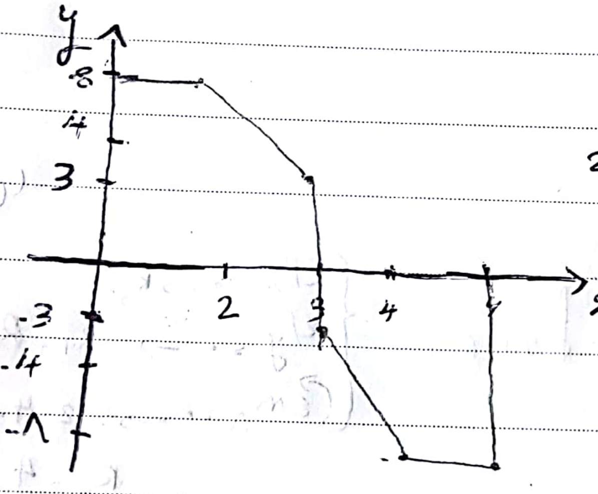
$5\times(4-x)$

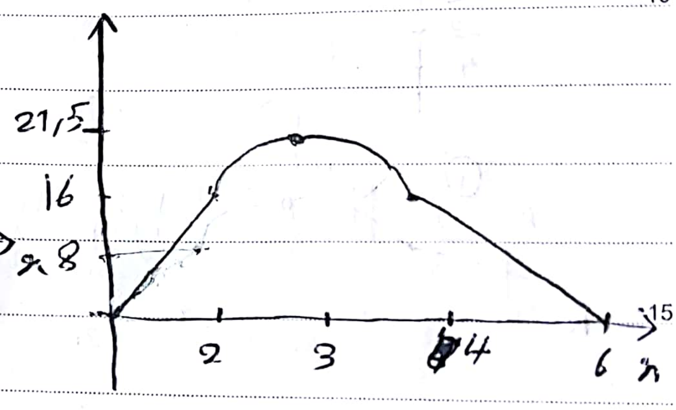


③
$\sum F_x = 0 \rightarrow P = 0$
$\sum F_y = 0 \rightarrow V = 5(4-x) - 8 = 12 - 5x$
$\sum M_x = 0 \rightarrow +M = 8(6-x) - \frac{5}{2}(4-x)^2$
$M = -\frac{5}{2}x^2 + 12x + 8$

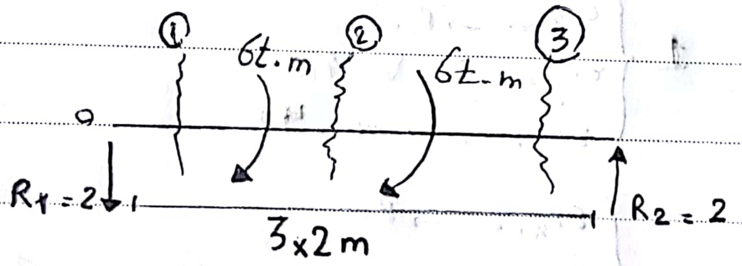


④
$\sum F_x = 0 \rightarrow P = 0$
$\sum F_y = 0 \rightarrow V = -\Lambda$
$\sum M_x = 0 \rightarrow M = \Lambda(6-x)$

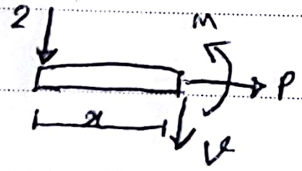




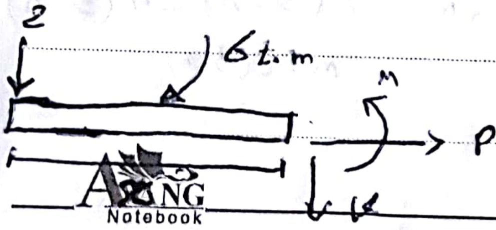
مثال،



$\sum F_x = 0 \rightarrow R_3 = 0$
$\sum F_y = 0 \rightarrow R_1 = -R_2$
$\sum M_o = 0 \rightarrow -6R_2 + 12 = 0$
$\Rightarrow R_2 = 2_t$



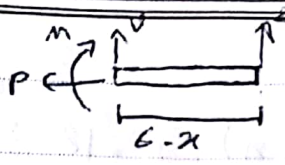
①
$\sum F_x = 0 \rightarrow P = 0$
$\sum F_y = 0 \rightarrow V = -2$
$\sum M_x = 0 \rightarrow M = -2x$



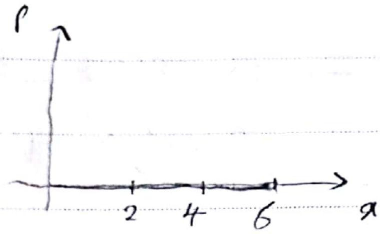
②
$\sum F_x = 0 \rightarrow P = 0$
$\sum F_y = 0 \rightarrow V = -2t$
$\sum M_x = 0 \rightarrow M = -2x + 6$

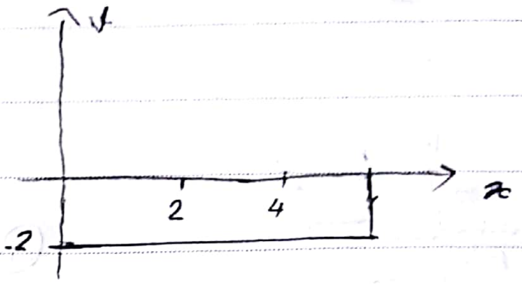
Notebook

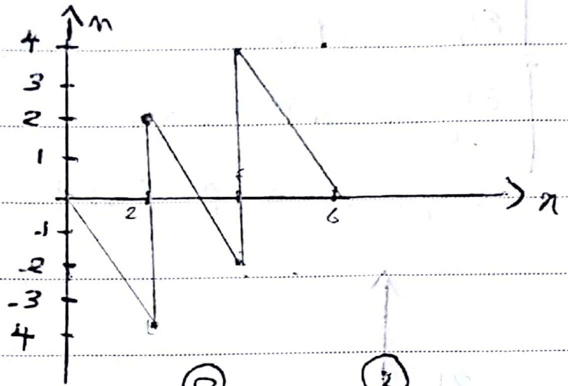
Scanned by CamScanner



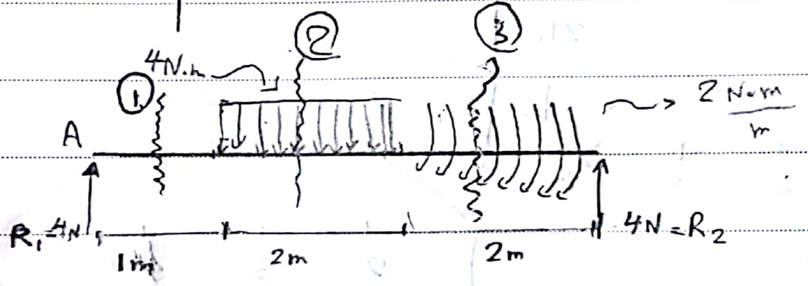
③
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow P = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow V = -2 \\ \Sigma M_x = 0 \rightarrow M = 2(6-x) \end{cases}$$





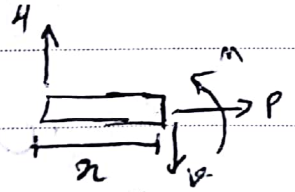


مثال ۱

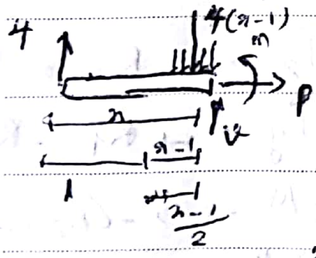


$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow R_3 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow R_1 + R_2 = 8N \\ \Sigma M_A = 0 \rightarrow 8 \times 2 + 4 - 5R_2 = 0 \end{cases}$$

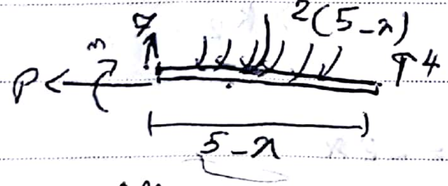
$R_2 = 4$



1
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow P = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow V = 4N \\ \Sigma M_x = 0 \rightarrow M = 4x \end{cases}$$

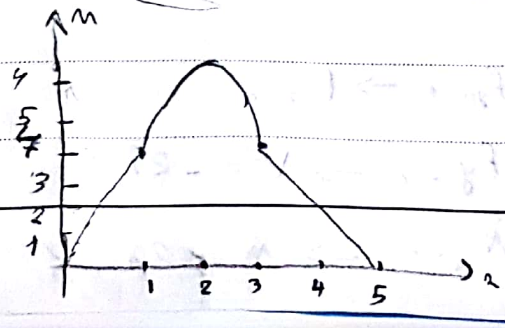


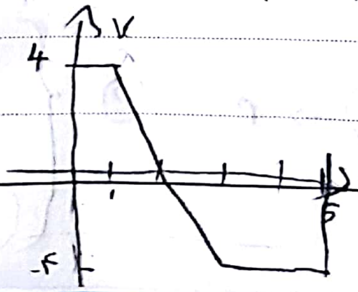
2
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow P = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow V = 4 - F(x-1) = 8-4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow P = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow V = -FN \\ \Sigma M_x = 0 \rightarrow +M + 2(5-x) - 4(5-x) \end{cases}$$

$M = 2(5-x)$

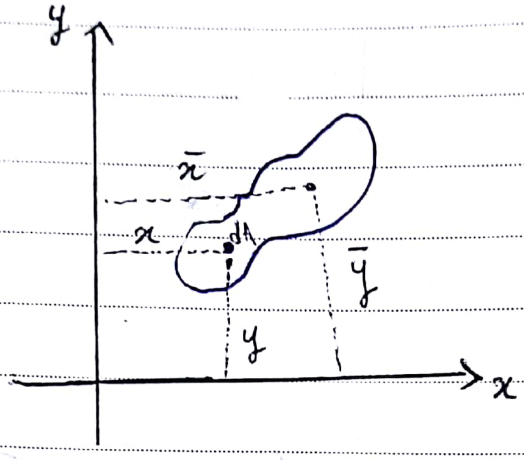




AVANG Notebook

Scanned by CamScanner

Static Moment of Area & Centroid ممان استاتیکی سطح و مرکز سطح

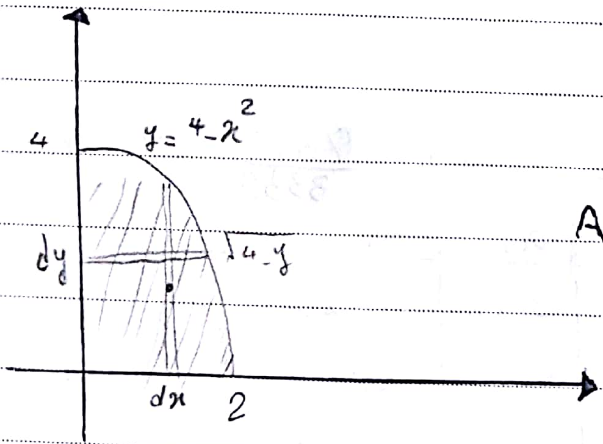


$S_x = A\cdot\bar{y} = \int y\cdot dA$ ممان استاتیکی سطح A نسبت به محور x ها

$S_y = A\cdot\bar{x} = \int x\cdot dA$

$$C\begin{cases}\bar{x} = \dfrac{\int x\cdot dA}{A} = \dfrac{S_y}{A}\\[2ex] \bar{y} = \dfrac{\int y\cdot dA}{A} = \dfrac{S_x}{A}\end{cases}$$

مثال) مطلوبست تعیین مرکز سطح محصور بین منحنی $y=4-x^2$ و محورهای x و y در ناحیه اول مختصات.



$$A = \int_0^2 y\cdot dx = \int_0^2 (4-x^2)\cdot dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = \frac{16}{3} = 5.33$$

$$S_y = \int_0^2 x\cdot(4-x^2)\cdot dx = \int_0^2 (4x-x^3)\cdot dx$$

$$= 2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big]_0^2 = 4$$

YEKTA

Scanned by CamScanner

$\bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{4}{5,33} = 0,75$

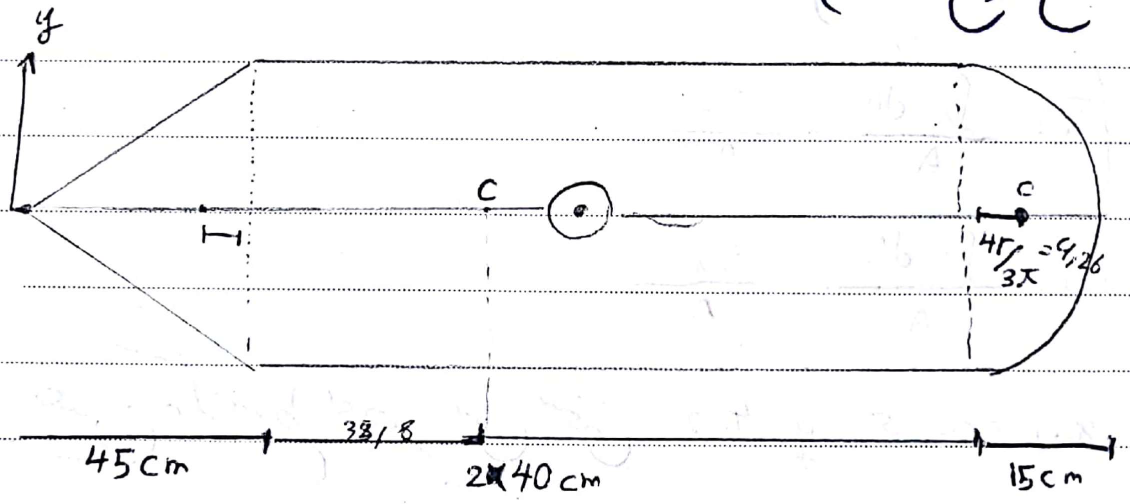
$S_x = \int \left(\frac{4-x^2}{2}\right) \cdot dA = \int_0^2 \frac{(4-x^2)^2}{2} dx = \int \left(\frac{16+x^4}{2} - 4x^2\right) dx = 8x + \frac{x^5}{10} - \frac{4x^3}{3} \Big]_0^2$

$= 16 + 3,2 - 10,66 = 8,53$

$\bar{y} = \frac{8,53}{5.33} = 1.6$

مثال ۲) مقطع پایه یک پل مطابق شکل می باشد محل مرکز سطح آن را بدست آورید.

(شعاع سوراخ: 5cm)



$\bar{y} = 0$

$\bar{x} = ? \Rightarrow \frac{\int x \cdot dA}{A} = \frac{\Sigma x_i A_i}{\Sigma A_i} \Rightarrow \frac{263980}{3350} = 78.8 \text{ cm}$

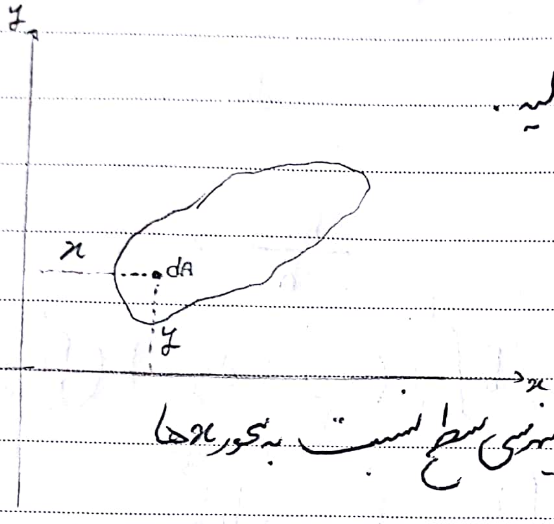
	A_i	x_i	$A_i x_i$
مثلث	$\frac{30\times45}{2} = 675$	30 cm	20250 cm^2
مستطیل	2400	85 cm	24000
نیم دایره	$\frac{\pi 225}{2} = 353.25$	125 + 6,26 = 131.36	46403
دایره	$-25\pi = -78.5$	85 cm	-6672.5
کل	3350 cm^2		263980

YEKTA

Scanned by CamScanner

ممان اینرسی سطح Area Moment of interia

اینرسی: تمایل به باقی ماندن در حالت اولیه.

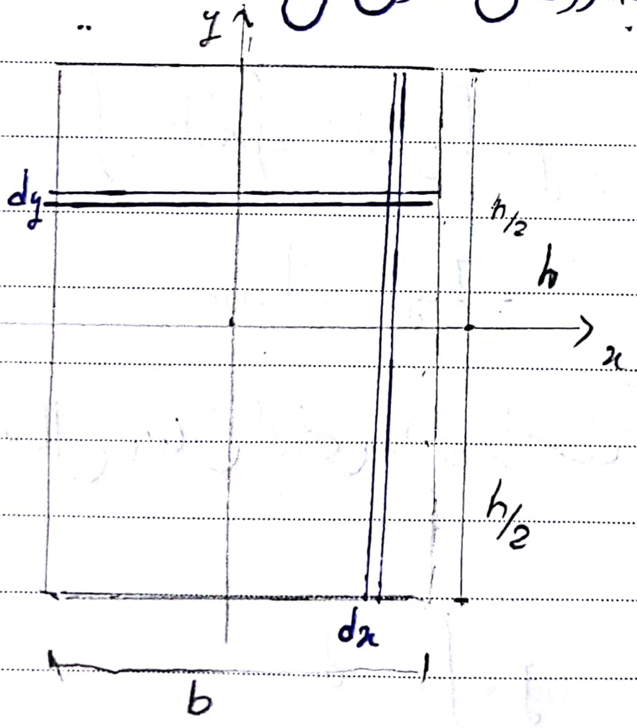


$S_x = \Sigma y\,dA = \int y \cdot dA$

ممان اینرسی سطح نسبت به محور xها $I_{xx} = \int y^2 \cdot dA \quad cm^4$

ممان اینرسی سطح نسبت به محور yها $I_{yy} = \int x^2 dA$

مثال ۱: ممان اینرسی مستطیل را نسبت به محورهای تقارن آن بدست آورید.



$dA = b\,dy$

$I_{xx} = \int y^2 dA = \int^{h/2} y^2 b\,dy$

$= b\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b\,\frac{y^2}{2}\Big]_{-h/2}^{h/2}$

$= b\left(\frac{h^3}{24} - \left(-\frac{h^3}{24}\right)\right) = \boxed{\frac{bh^3}{12}}$

$I_{yy} = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \underbrace{dA}_{h\,dx} = h\int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx = \boxed{\frac{hb^3}{12}}$

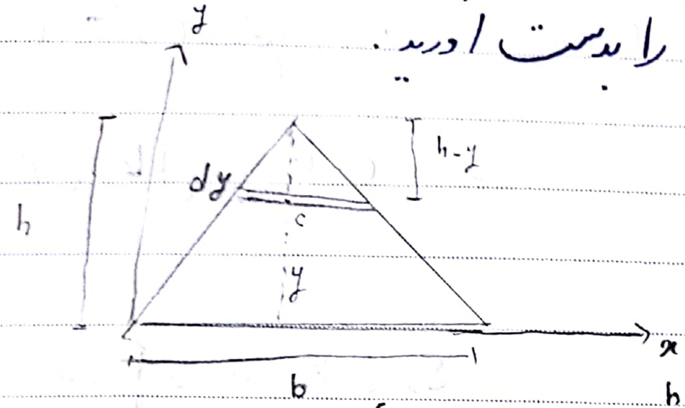
YEKTA

Scanned by CamScanner

Subject:

Year: Month: Date:

ممان اینرسی مثلث حول قاعده آن را بدست آورید.



$dA = c\,dy$

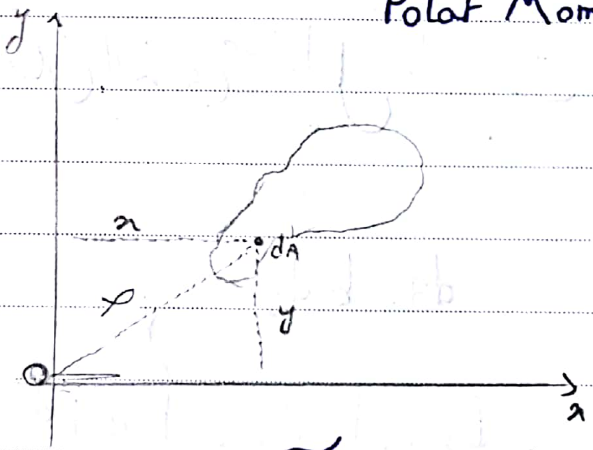
$0 \le c \le b$

$\frac{h-y}{h} = \frac{c}{b} \Rightarrow c = \left(\frac{h-y}{h}\right)b$

$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int y^2 \cdot c \cdot dy = b\int_0^h y^2\left(\frac{h-y}{h}\right)dy = b\left(\int_0^h \left(y^2 - \frac{y^3}{h}\right)dy\right)$$

$$= b\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h}\right]_0^h = b\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4}\right) = \frac{bh^3}{12}$$

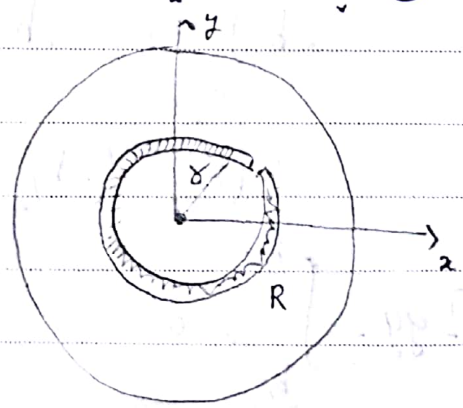
ممان اینرسی قطبی Polar Moment of Inertia



$$I = \int \rho^2 \cdot dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

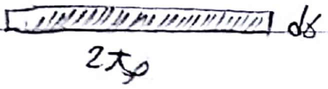
$$= I_{yy} + I_{xx}$$

مثال) ممان اینرسی دایره را نسبت به مرکز آن بدست آورید.



$$I = \int \rho^2 \cdot dA$$

$$= \int_0^R \rho^2\, 2\pi\rho\, d\rho = 2\pi\int_0^R \rho^3 d\rho$$



$$= \frac{2\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

YEKTA

Scanned by CamScanner

Subject :
Year : Month : Date :

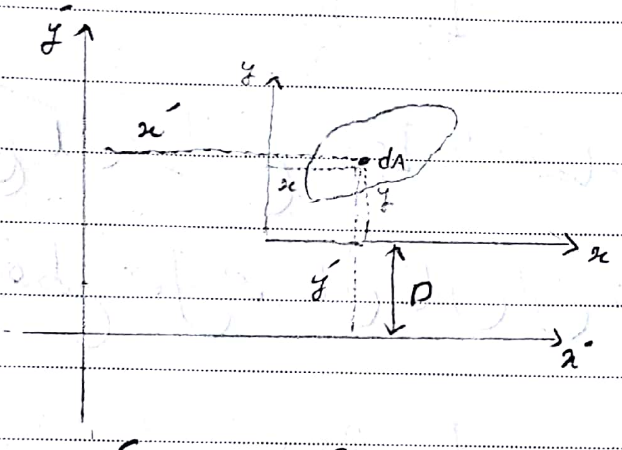
حاصل ضرب اینرسی Product of Inertia

$$I_{xy}=\int y.x\,dA$$

شعاع ژیراسیون radius of Gyation

$$r_x=\sqrt{\frac{I_{xx}}{A}} \qquad r_y=\sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} \quad , \quad r_o=\sqrt{\frac{J}{A}}$$

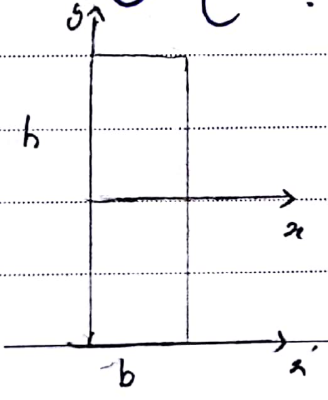
انتقال محور مختصات:



$$I_{x'x'}=\int y'^2\,dA=\int (y+D)^2\,dA=\underbrace{\int y^2.dA}_{I_{xx}}+\underbrace{D^2\int dA}_{D^2A}+\underbrace{2\int D.y.dA}_{2DS_x}$$

$$\rightarrow I_{x'}=\bar{I}_x+A.D^2$$

مثال: ممان اینرسی مستطیل را نسبت به اضلاع آن حساب کنید.



$$\bar{I}_{xx}=\frac{bh^3}{12}$$

$$\bar{I}_{x'}=\bar{I}_{xx}+D^2.A=\frac{bh^3}{12}+\left(\frac{h}{2}\right)^2.b.h$$

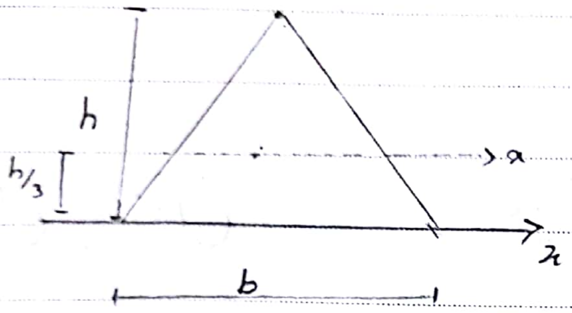
$$=\frac{bh^3}{12}+\frac{bh^3}{4}=\frac{bh^3}{3}$$

$$I_{y'}=\frac{hb^3}{3}$$

YEKTA

Scanned by CamScanner

#.ممان اینرسی مثلث را حول محوری که از مرکز سطح و موازی با قاعده آن بدست آورید.

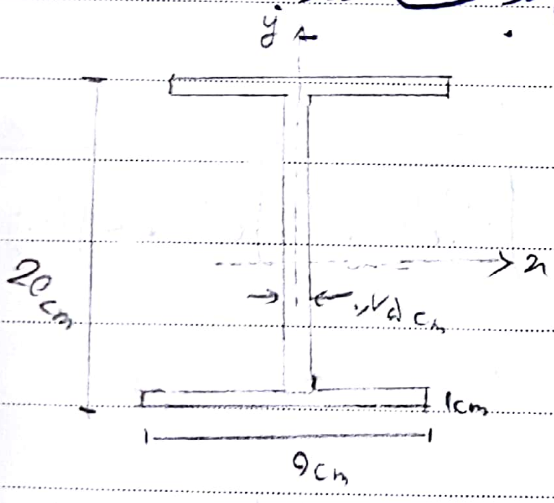


$$\frac{bh^3}{12} = \bar{I}_x + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{bh}{2}$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}$$

$$\bar{I}_y = \frac{hb^3}{36}$$

مثال) مقطع یک تیر از نوع IPE200 با مشخصات شکل می باشد. ممان های اینرسی این مقطع حول محورهای تقارن آن بدست آورید



$$I_{xx} = 2\left(\frac{9\times 1^3}{12} + (9{,}5)^2 \cdot 9\times 1\right) + \frac{0{,}75\times 18^3}{12} = 2160\ cm^4$$

$$I_{yy} = \left(\frac{1\times 9^3}{12}\right)\times 2 + \frac{18\times 0{,}75^3}{12} = 128\ cm^4$$

Scanned by CamScanner